

Plasmawellen im inhomogenen Medium

HANS VOLLAND

(Mitteilung der Astronomischen Institute der Universität Bonn, Nr. 67)

(Z. Naturforsch. 20 a, 1143–1149 [1965]; eingegangen am 14. Januar 1965)

Es wird die Ausbreitung ebener Plasmawellen in einem anisotropen und inhomogenen Medium, bestehend aus beliebig vielen Plasmakomponenten, mit Hilfe der linearisierten magnetohydrodynamischen Gleichungen untersucht. Die Entwicklung des Gleichungssystems führt auf ein System von homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung, dessen allgemeine Lösung der Matrizen ist. Er beschreibt die Kopplung der verschiedenen charakteristischen Wellenformen innerhalb des inhomogenen Mediums. Falls das Plasma durch eine beliebige Zahl dünner homogener Schichten approximiert werden kann, entstehen Lösungsformen, die für numerische Rechnungen an einer elektronischen Rechenmaschine geeignet sind. Die Energiebilanz aller hin- und rücklaufenden charakteristischen Wellen wird aufgestellt. Für ein Zweikomponentengas, bestehend aus Ionen und Elektronen, und senkrechte Inzidenz der Wellen werden die Lösungsformen explizit angegeben.

Innerhalb eines homogenen Plasmas, bestehend aus l Komponenten, können sich im Gültigkeitsbereich der magnetohydrodynamischen Näherung $2(l+2)$ verschiedene ebene charakteristische Wellen kleiner Amplitude ohne gegenseitige Beeinflussung ausbreiten, davon die eine Hälfte in positiver Ausbreitungsrichtung und die andere Hälfte in entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung. Die Ausbreitungseigenschaften der Wellen sind durch ihre Eigenwerte q_i gekennzeichnet. Bei fehlendem äußeren Magnetfeld und vernachlässigbarer Kopplung durch Stöße zwischen den einzelnen Plasmakomponenten sind die in positiver Richtung laufenden Wellen die zwei transversal schwingenden elektromagnetischen Wellen, parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisiert, sowie l unabhängige longitudinale „akustische“ Wellen der Plasmakomponenten. Die in negativer Richtung laufenden Wellen unterscheiden sich lediglich im Vorzeichen der Eigenwerte q_i von den positiven Wellen, und es gibt jeweils ein Wellenpaar, bestehend aus einer hin- und einer rücklaufenden Welle, mit den Eigenwerten q_i und $q_{m+i} = -q_i$.

Bei Anwesenheit eines äußeren Magnetfeldes sowie Stößen zwischen den Plasmakomponenten können alle charakteristischen Wellen sowohl einen longitudinalen als auch einen transversalen Anteil besitzen, alle $2m$ Eigenwerte q_i ($m=l+2$) werden im allgemeinen voneinander verschieden sein und selbst die Eigenwerte eines Wellenpaares unterscheiden sich nicht mehr allein durch das Vorzeichen.

Innerhalb eines inhomogenen Plasmas findet an jeder Stelle eine Kopplung zwischen allen charakteristischen Wellen statt. Eine Reflexion ist in diesem Sinne die Kopplung zwischen einer hin- und einer rücklaufenden Welle. Die Kopplung zwischen zwei Wellen wird um so größer, je kleiner die Differenz zwischen ihren Eigenwerten ist und wird extrem groß, sobald beide Eigenwerte übereinstimmen. Bei senkrechter Inzidenz der Wellen auf ein geschichtetes Medium sind die Eigenwerte q_i mit den Brechungsindizes n_i identisch. Die bekannte Bedingung für die Reflexion der i -ten elektromagnetischen Welle $n_i=0$ bedeutet, daß an dieser Stelle die beiden Eigenwerte der hin- und rücklaufenden Welle übereinstimmen und damit eine extrem große Kopplung auftritt.

Es ist demnach auch eine Vorwärtskopplung zwischen einer longitudinalen Plasmawelle und elektromagnetischen Wellen innerhalb eines Gebietes mit endlichen Dichte- und Temperaturgradienten möglich. Das ist eine der Erklärungsmöglichkeiten für die Entstehung nichtthermischer Radioburststrahlung auf der Sonne^{1,2} sowie von Radiofrequenzstrahlung in Laborplasmen. Erste Rechnungen auf diesem Gebiet stammen von FIELD³ sowie von KRITZ und MINTZER⁴. Beide berechnen den Durchgang longitudinaler Plasmawellen durch eine Diskontinuität und bestimmen den Anteil der dabei entstehenden elektromagnetischen Energie. Im folgenden soll das Verhalten eines horizontal geschichteten, sonst aber beliebig inhomogenen Plasmas gegenüber ebenen Wellen untersucht werden.

¹ V. L. GINZBURG u. V. V. ZHELEZNYAKOV, Soviet Astron. — AJ 3, 235 [1959].

² G. BURKHARDT, CH. FAHL u. R. W. LARENZ, Z. Phys. 161, 380 [1961].

³ G. B. FIELD, Astrophys. J. 124, 555 [1956].

⁴ A. KRITZ u. D. MINTZER, Phys. Rev. 117, 382 [1960].



Problemstellung

Wir betrachten ein ruhendes und im Mittel neutrales Plasma, bestehend aus l verschiedenen Komponenten: Elektronen, Ionen und Neutralteilchen. Das in einem kartesischen Koordinatensystem in x - und y -Richtung unendlich ausgedehnte Plasma sei im Bereich $z_1 \leq z \leq z_n$ inhomogen, derart, daß alle Parameter allein von der Höhe z abhängen (siehe Abb. 1). Außerhalb dieser Übergangsschicht sei das Plasma quasihomogen. Quasihomogenität soll be-

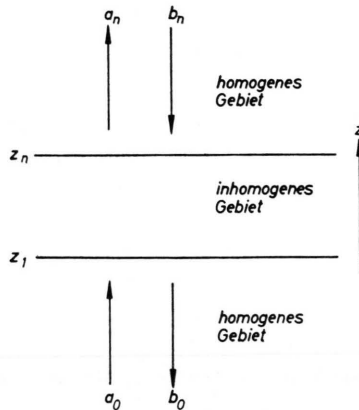


Abb. 1. Inhomogenes Gebiet als 2 m -Tor.

deuten, daß dort für ebene Plasmawellen die strahlenoptische Betrachtungsweise zulässig ist. Das heißt, die Gradienten der Plasmaparameter sind so klein, daß sich die verschiedenen charakteristischen Wellen praktisch ungestört ohne gegenseitige Kopplung ausbreiten können.

In den Gebieten außerhalb der Übergangsschicht seien nun je $l+2=m$ ebene Plasmawellen der Kreisfrequenz ω vorgegeben, die in die Übergangsschicht hineinlaufen (\mathbf{a}_0 und \mathbf{b}_n). Gesucht wird der Anteil der Energie der Wellen, der an den Grenzen z_1 und z_n reflektiert wird, bzw. der durch die Schicht hindurchtritt. Es sind dies die je m Wellen \mathbf{b}_0 und \mathbf{a}_n . Einen solchen Zusammenhang liefert die Streumatrix \mathbf{S} , die durch die folgende Matrixengleichung definiert ist:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{D}_n \\ \mathbf{D}_0 & \mathbf{R}_n \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Da die m möglichen Wellen, die jeweils in einer Richtung laufen, in den Spaltenmatrizen \mathbf{a} und \mathbf{b} zusammengefaßt sind, ist \mathbf{S} eine quadratische Matrix

mit $2m$ Zeilen und $2m$ Spalten. Ihre $m \times m$ -Untermatrizen \mathbf{R} und \mathbf{D} haben eine einfache physikalische Bedeutung. \mathbf{R}_0 und \mathbf{R}_n sind die untere und obere Reflexionsmatrix, \mathbf{D}_0 und \mathbf{D}_n sind die untere und obere Durchlaßmatrix. Bei Kenntnis der Elemente dieser Matrizen ist das Verhalten der Übergangsschicht zwischen z_1 und z_n ebenen Wellen gegenüber eindeutig bestimmt. In der Nachrichtentechnik wird ein solches Gebilde eine Verzweigungsstelle oder ein 2 m -Tor genannt⁵.

Wir betrachten harmonische ebene Wellen so kleiner Amplitude und so kleiner Frequenz, daß die linearisierten magnetohydrodynamischen Gleichungen gültig sind. Sie sollen sich in der x - z -Ebene ausbreiten. Im quasihomogenen Raum besitzt die i -te Welle die Orts- und Zeitabhängigkeit

$$\exp \{ j \omega t - j (k_i \sin \vartheta_i x + k_i \cos \vartheta_i z) \}. \quad (3)$$

Hier ist t die Zeit, k_i eine im allgemeinen komplexe Wellenzahl und ϑ_i der im allgemeinen komplexe Einfallswinkel der Wellen. Aus der Akustik ist bekannt, daß Schallwellen wie elektromagnetische Wellen dem SNELLIUSschen Brechungsgesetz gehorchen:

$$k_i \sin \vartheta_i = k_0 \sin \vartheta_0 = \text{const.} \quad (4)$$

Es lassen sich daher die Ableitungen nach der Zeit und nach x und y ersetzen durch

$$\frac{\partial}{\partial t} = j \omega; \quad \frac{\partial}{\partial x} = -j k_0 S_0 \quad (S_0 = \sin \vartheta_0); \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0,$$

wobei $k_0 = \omega/c$ die Wellenzahl der elektromagnetischen Wellen im Vakuum und ϑ_0 ihr Einfallswinkel im Vakuum sein soll. Der Eigenwert der i -ten Welle ist

$$q_i = (k_i/k_0) \cos \vartheta_i = n_i \cos \vartheta_i \\ (n_i = \text{Brechungsindex}).$$

Mit Gl. (4) folgt daraus

$$q_i = (n_i^2 - S_0^2)^{1/2} = \alpha_i - j \beta_i \quad (\alpha_i, \beta_i \text{ reell}). \quad (5)$$

Der Eigenwert q_i wird bei senkrechter Inzidenz ($S_0 = 0$) identisch mit dem Brechungsindex.

Innerhalb des quasihomogenen Plasmas ist die Phasengeschwindigkeit der i -ten charakteristischen Welle

$$v_i = c / (S_0^2 + \alpha_i^2)^{1/2},$$

und die Ausbreitungsrichtung der Ebene gleicher Phase ist durch den Winkel

$$\vartheta'_i = \arctg(S_0/\alpha_i)$$

⁵ W. KLEIN, Grundlagen der Theorie der elektrischen Schaltungen, Akademie-Verlag, Berlin 1961.

bestimmt. Der imaginäre Anteil von q_i beschreibt die Dämpfung in z -Richtung. Der Betrag der i -ten Welle [Gl. (3)] ist gleich

$$\exp(-k_0 \beta_i z).$$

Daher bedeutet

$\alpha_i, \beta_i > 0$ Ausbreitung in positiver Richtung,

$\alpha_i, \beta_i < 0$ Ausbreitung in negativer Richtung.

Für das Plasma gelten die folgenden zeitfreien linearisierten Gleichungen⁶ (es wird das internationale MKSA-System verwendet; die Größen mit einem Querstrich bedeuten Mittelwerte, Größen ohne Querstrich sind die Abweichungen von den Mittelwerten):

1. Die MAXWELLSchen Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= j \omega \epsilon_0 \mathbf{E} + \sum_{\nu=1}^{l-1} \mathbf{I}_{\nu}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -j \omega \mu_0 \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (6)$$

$\mathbf{I}_{\nu} = \bar{n}_{\nu} e_{\nu} \mathbf{v}_{\nu}$ (elektrischer Strom der ν -ten Plasmakomponente),

$$\sum_{\nu=1}^{l-1} \bar{n}_{\nu} e_{\nu} = 0 \quad (\text{Bedingung der Quasineutralität}).$$

2. Die Bewegungsgleichungen (bei Vernachlässigung äußerer mechanischer Kräfte)

$$j \omega \bar{n}_{\nu} m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} = e_{\nu} \bar{n}_{\nu} (\mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{v}_{\nu} \times \mathbf{H}_0) - \operatorname{grad} p_{\nu} - \sum_{j=1}^l P_{\nu j} \quad (\nu < l)$$

$$\text{mit} \quad P_{\nu j} = -P_{j\nu} = \frac{m_{\nu} m_j}{m_{\nu} + m_j} \bar{n}_{\nu} \gamma_{\nu j} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{\nu}), \quad (7)$$

$$j \omega \bar{n}_l m_l \mathbf{v}_l = -\operatorname{grad} p_l - \sum_{j=1}^{l-1} P_{lj} \quad (\text{neutrale Komponente})$$

$$\bar{\mathbf{v}}_{\nu} = 0.$$

3. Die Kontinuitätsgleichungen

$$j \omega n_{\nu} + \bar{n}_{\nu} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\nu} = 0. \quad (8)$$

4. Aus der Adiabatangleichung folgt wegen $n_{\nu} \ll \bar{n}_{\nu}$

$$p_{\nu} = m_{\nu} V_{\nu}^2 n_{\nu}. \quad (9)$$

Hier bedeuten

\mathbf{E}, \mathbf{H} elektrisches und magnetisches Feld der Welle, \mathbf{H}_0 ($|\mathbf{H}_0| \gg |\mathbf{H}|$) äußeres Magnetfeld,

m_{ν}	Masse	} der ν -ten Plasma- komponente
\mathbf{v}_{ν}	Partialgeschwindigkeit	
p_{ν}	Partialdruck	
\bar{n}_{ν}	mittlere Dichte	
n_{ν}	Dichteschwankung	
e_{ν}	Ladung	
T_{ν}	Temperatur	
κ_{ν}	adiabatische Konstante	} „Schall“- Geschwindigkeit
$V_{\nu} = \sqrt{\frac{\kappa_{\nu} k T_{\nu}}{m_{\nu}}}$		

$\gamma_{\nu j}$ Stoßzahl zwischen der ν -ten und der j -ten Plasmakomponente,

k BOLTZMANN-Konstante,

ϵ_0 und μ_0 Dielektrizitätskonstante und Permeabilität des freien Raumes,

$Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = 377 \Omega$ (Wellenwiderstand des freien Raumes).

Dies sind insgesamt $5l + 6$ lineare Gleichungen mit den $5l + 6$ Unbekannten $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{v}_{\nu}, p_{\nu}, n_{\nu}$, aus denen die $3l + 2$ Größen $n_{\nu}, H_z, E_z, v_{\nu x}$ und $v_{\nu y}$ eliminiert werden können. Übrig bleiben $2(l + 2) = 2m$ homogene Differentialgleichungen erster Ordnung für die Unbekannten $E_x, E_y, H_x, H_y, v_{\nu z}$ und p_{ν} , die in Matrixform geschrieben werden können:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dz} + j k_0 \mathbf{K} \mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (10)$$

Da an einer mathematischen Trennfläche keine Energie verlorengehen kann, muß die Vertikalkomponente der Energieströmung stetig durch eine Grenzfläche hindurchgehen. Wegen Gl. (27) stehen deshalb in der Spaltenmatrix \mathbf{c} allein Größen, die stetig an einer Diskontinuitätsfläche sind. Sie werden zweckmäßigerweise folgendermaßen geordnet und normiert:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}; \quad \mathbf{h} = \sqrt{Z_0} \begin{pmatrix} H_y \\ -H_x \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathbf{p} = \frac{\sqrt{Z_0} |e|}{\omega m_e} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_l \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v} = \frac{\omega m_e}{\sqrt{Z_0} |e|} \begin{pmatrix} v_{1z} \\ v_{2z} \\ \vdots \\ v_{lz} \end{pmatrix} \quad (13)$$

(m_e und e sind Masse und Ladung des Elektrons).

⁶ A. SCHLÜTER, Z. Naturforschg. 5 a, 72 [1950].

Die Lösung des Gleichungssystems

Die Lösung des Gleichungssystems Gl. (10) lautet⁷

$$\mathbf{c}(z_1) = \mathbf{T}_{z_1}^{z_n} \mathbf{c}(z_n), \quad (14)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{z_1}^{z_n} = & \mathbf{I} + j k_0 \int_{z_1}^{z_n} \mathbf{K}(\zeta_1) d\zeta_1 \\ & + (j k_0)^2 \int_{z_1}^{z_n} \int_{z_1}^{z_n} \mathbf{K}(\zeta_1) \mathbf{K}(\zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2 \dots \end{aligned} \quad (15)$$

der Matrizen ist (\mathbf{I} ist eine Einheitsmatrix).

Der Matrizen gehorcht der Produktenregel

$$\mathbf{T}_{z_1}^{z_n} = \prod_{\mu=1}^{n-1} \mathbf{T}_{z_\mu}^{z_{\mu+1}}. \quad (16)$$

Die z_μ sind irgendwelche Zwischenwerte im Intervall (z_1, z_n) . Diese Regel erlaubt die Unterteilung des betrachteten Gebietes in so kleine Teilintervalle, daß die Reihe Gl. (15) schnell konvergiert.

Falls solche Teilintervalle homogene Schichten der Dicke $\Delta z_\mu = z_{\mu+1} - z_\mu$ sind, innerhalb der die Elemente der Matrix \mathbf{K} konstant sind, so vereinfacht sich der Matrizen zu

$$\mathbf{T}_{z_\mu}^{z_{\mu+1}} = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(j k_0 \mathbf{K}_\mu \Delta z_\mu)^u}{u!} = \exp(j k_0 \mathbf{K}_\mu \Delta z_\mu). \quad (17)$$

Jetzt können sich innerhalb dieser homogenen Schicht die charakteristischen Wellen ungekoppelt ausbreiten, und eine Kopplung findet nur noch an den Diskontinuitätsflächen zwischen den Schichten statt.

Die Eigenwerte q_i der charakteristischen Wellen werden aus der Bedingungsgleichung

$$\det(\mathbf{K} - q_i \mathbf{I}) = 0 \quad (18)$$

gefunden. Die charakteristischen Wellen hängen mit der Matrix \mathbf{c} über die Transformationsmatrix \mathbf{P} gemäß

$$\mathbf{c}(z_\mu) = \mathbf{P}_\mu \begin{pmatrix} \mathbf{a}_\mu(z_\mu) \\ \mathbf{b}_\mu(z_\mu) \end{pmatrix} \quad (19)$$

zusammen, wobei in der Spaltenmatrix \mathbf{a}_μ die aufsteigenden Wellen und in der Spaltenmatrix \mathbf{b}_μ die absteigenden Wellen innerhalb der μ -ten Schicht zusammengefaßt sind. Die Elemente p_{ji} der i -ten

Spalte der Matrix \mathbf{P} findet man aus dem homogenen Gleichungssystem

$$(\mathbf{K} - q_i \mathbf{I}) \mathbf{p}_i = 0. \quad (20)$$

\mathbf{p}_i ist die i -te Spaltenmatrix der Matrix \mathbf{P} . Die p_{ji} sind von einem unbestimmten Faktor linear abhängig. Dieser Faktor wird im nächsten Abschnitt festgelegt.

Innerhalb der μ -ten homogenen Schicht besteht zwischen den charakteristischen Wellen am unteren Rande (z_μ) und am oberen Rande ($z_{\mu+1}$) der Schicht die Beziehung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_\mu(z_\mu) \\ \mathbf{b}_\mu(z_\mu) \end{pmatrix} = \exp(j k_0 \mathbf{N}_\mu \Delta z_\mu) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_\mu(z_{\mu+1}) \\ \mathbf{b}_\mu(z_{\mu+1}) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Hier ist

$$\mathbf{N}_\mu = \mathbf{P}_\mu^{-1} \mathbf{K}_\mu \mathbf{P}_\mu$$

die Normalform der Matrix \mathbf{K}_μ , deren Diagonalglieder allein von Null verschieden sind und aus den Eigenwerten q_i bestehen. Die Matrix $\exp(j k_0 \mathbf{N}_\mu \Delta z_\mu)$ hat ebenfalls nur Diagonalglieder, die von Null verschieden sind und die Gestalt $\exp(j k_0 q_{\mu i} \Delta z_\mu)$ besitzen. Gl. (21) ist der Ausdruck der ungekoppelten Ausbreitung der $2m$ charakteristischen Wellen innerhalb einer homogenen Schicht. Falls zwei oder mehrere Eigenwerte gleich sind, entartet die Normalform⁸.

Wegen der Stetigkeit der Komponenten der Matrix \mathbf{c} hat der Matrizen jetzt die Gestalt

$$\mathbf{T}_{z_1}^{z_n} = \prod_{\mu=1}^{n-1} \mathbf{P}_\mu \exp(j k_0 \mathbf{N}_\mu \Delta z_\mu) \mathbf{P}_\mu^{-1}. \quad (22)$$

Die endgültige Lösung, die die charakteristischen Wellen im unteren quasihomogenen Raum ($z \leq z_1$) mit den charakteristischen Wellen im oberen quasihomogenen Raum ($z \geq z_n$) verbindet, lautet

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_0(z_1) \\ \mathbf{b}_0(z_1) \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_n(z_n) \\ \mathbf{b}_n(z_n) \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{T} = \mathbf{P}_0^{-1} \mathbf{T}_{z_1}^{z_n} \mathbf{P}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 & \mathbf{T}_4 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Hier sind \mathbf{P}_0 und \mathbf{P}_n die Transformationsmatrizen der homogenen Räume an den Grenzen z_1 bzw. z_n zum inhomogenen Gebiet. Diese Lösungsform ist der geeignete Ausgangspunkt für eine numerische Rechnung mit Hilfe einer schnellen elektronischen Rechenmaschine.

⁷ W. SCHMEIDLER, Vorträge über Determinanten und Matrizen, Akademie-Verlag, Berlin 1949.

⁸ H. VOLLAND, Arch. Elektr. Übertr. **16**, 515 [1962].

Durch einfache Umrechnung gewinnt man aus den Untermatrizen von \mathbf{T} die Untermatrizen der Streumatrix \mathbf{S} [Gl. (2)]:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 &= \mathbf{T}_3 \mathbf{T}_1^{-1} & \mathbf{D}_0 &= \mathbf{T}_1^{-1} \\ \mathbf{R}_n &= -\mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{T}_2 & \mathbf{D}_n &= \mathbf{T}_4 - \mathbf{T}_3 \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{T}_2. \end{aligned} \quad (25)$$

Der Energietransport der charakteristischen Wellen

Der Energievektor setzt sich aus dem POYNTINGschen Vektor \mathbf{N}_e und dem mechanischen Energievektor \mathbf{N}_t zusammen⁹:

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_e + \mathbf{N}_t = \mathbf{E} \times \mathbf{H} + \sum_{v=1}^l n_v m_v V_v^2 \mathbf{v}_v. \quad (26)$$

Wegen der Gln. (9), (12) und (13) ist die z -Komponente von \mathbf{N} das innere Produkt der Spaltenmatrizen \mathbf{e} und \mathbf{h} bzw. \mathbf{p} und \mathbf{v}

$$N_z = \tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{h} + \tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v}. \quad (27)$$

$\tilde{\mathbf{e}}$ und $\tilde{\mathbf{p}}$ sind die transponierten Matrizen von \mathbf{e} und \mathbf{p} . Innerhalb einer homogenen Schicht sind die charakteristischen Wellen unabhängig voneinander die Träger der Energie. Das Zeitmittel über die z -Komponente N_z der i -ten aufsteigenden Welle liefert die von ihr durch die Grenzfläche transportierte Wirkenergie pro Fläche. Wir gewinnen sie mit Hilfe der Elemente p_{ji} der \mathbf{P} -Matrix zu

$$\begin{aligned} \bar{N}_{zi} &= \frac{|A_i|^2}{2} \left[\frac{p_{ii}^2}{2} \left\{ p'_{3i} + p'_{3i} + p'_{2i} p'_{4i} + p'_{2i} p'_{4i} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\lambda=5}^{m+2} (p'_{\lambda i} p'_{m-2+\lambda, i} + p'_{\lambda i} p'_{m-2+\lambda, i}) \right\} \right] \\ (p'_{ji} &= p_{ji}/p_{ii}; \quad i = 1, \dots, m). \end{aligned} \quad (28)$$

Hier ist A_i das i -te Element der Spaltenmatrix \mathbf{a} , die die aufsteigenden Wellen enthält, p'_{jk} ist der konjugiert komplexe Wert von p_{jk} , und der unbestimmte reelle Faktor der i -ten Spaltenmatrix \mathbf{p}_i von \mathbf{P} ist gleich p_{ii} gesetzt worden. Entsprechend gewinnt man die rücklaufenden Wellen B_i , die Elemente der Spaltenmatrix \mathbf{b} , indem der Index i von $m+1$ bis $2m$ durchlaufen wird. Der reelle Faktor p_{ii} wird nun so gewählt, daß die eckige Klammer in Gl. (28) den Wert Eins annimmt. Damit erhalten wir als gesamte Wirkleistung pro Fläche (in Watt/m²) aller charakteristischen Wellen, die durch die

Grenzfläche z_1 hindurchtritt:

$$\begin{aligned} \bar{N}_z|_{z_1} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \{ |A_i|^2 - |B_{m+i}|^2 \}_{z_1} \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{a}}_0 \cdot \mathbf{a}_0^* - \tilde{\mathbf{b}}_0 \cdot \mathbf{b}_0^*). \end{aligned} \quad (29)$$

Durch die obere Grenzfläche an der Stelle z_n tritt hindurch:

$$\bar{N}_z|_{z_n} = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{a}}_n \cdot \mathbf{a}_n^* - \tilde{\mathbf{b}}_n \cdot \mathbf{b}_n^*). \quad (30)$$

Die Differenz der Wirkleistungen

$$\Delta \bar{N} = \bar{N}_z|_{z_1} - \bar{N}_z|_{z_n}$$

ist die in der Schicht absorbierte und in Wärme umgesetzte Energie. Im verlustfreien Plasma (bei Vernachlässigung der Stöße) ist $\Delta \bar{N} = 0$. Bei Kenntnis der Elemente der Streumatrix \mathbf{S} [Gl. (2)] gestatten die Gln. (29) und (30) die Aufstellung einer vollständigen Energiebilanz der Wellen in der Übergangsschicht.

Beispiel: Zweikomponentengas und senkrechte Inzidenz der Wellen

Es soll nun ein praktisch wichtiges Beispiel explizit berechnet werden. Wir betrachten ein Plasma, bestehend aus einer Ionenkomponente (Index „i“), Elektronen (Index „e“) und Neutralgas (Index „n“). Die Rückwirkung von Ionen und Elektronen auf das Neutralgas sei vernachlässigbar klein. Dagegen werden die Stöße zwischen den Ionen und den Elektronen mit den Molekülen des Neutralgases berücksichtigt. Die Ausbreitung der Wellen erfolge senkrecht zu den Grenzflächen ($S_0 = 0$). Dann reduzieren sich die Bewegungsgleichungen auf die zwei Plasmakomponenten Ionen und Elektronen ($l=2$), und es existieren insgesamt 4 charakteristische Wellenpaare ($m=4$) im Plasma: die zwei elektromagnetischen Wellen, ordentliche und außerordentliche Komponente, die Elektronen- und die Ionen-Plasmawelle. Wir führen die folgenden Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\bar{n}_e e^2}{\varepsilon_0 m_e \omega^2}; & Y &= -\frac{e \mu_0 H_0}{m_e \omega}; & \lambda &= \frac{m_e \bar{n}_e}{m_i n_i}; \\ U_e &= 1 - j Z_e - j Z; & U_i &= 1 - j Z_i - j \lambda Z; \\ Z_e &= \frac{\gamma_{en}}{\omega} \frac{m_n}{(m_e + m_n)}; & Z_i &= \frac{\gamma_{in}}{\omega} \frac{m_n}{(m_i + m_n)}; \\ & & Z &= \frac{\gamma_{ei}}{\omega} \frac{m_i}{(m_e + m_i)}. \end{aligned}$$

Der Vektor des äußeren Magnetfeldes H_0 liege in der y - z -Ebene und bilde mit der z -Achse den Win-

⁹ J. F. DENISSE u. J. L. DELCROIX, Plasma Waves, Interscience Publishers, New York 1963.

kel Θ . Es ist

$$H_0 \cos \Theta = H_{0z} = H_L, \quad H_0 \sin \Theta = H_{0y} = H_T$$

und entsprechend

$$Y \cos \Theta = Y_L, \quad Y \sin \Theta = Y_T.$$

Weiter sei

$$\begin{aligned} d_1 &= (U_e U_i + \lambda U_i Z^2 - \lambda^2 U_e Y_L^2)/D, \\ d_2 &= j Y_L (U_i^2 + \lambda^2 Z^2 - \lambda^2 Y_L^2)/D, \\ d_3 &= j Z (U_e U_i + \lambda Z^2 - \lambda Y_L^2)/D, \\ d_4 &= Z Y_L (\lambda U_e - U_i)/D, \\ d_5 &= (U_e^2 U_i + \lambda U_e Z^2 - U_i Y_L^2)/D, \\ d_6 &= -j \lambda Y_L (U_e^2 + Z^2 - Y_L^2)/D, \\ D &= U_e^2 U_i^2 - Y_L^2 (\lambda^2 U_e^2 + U_i^2) \\ &\quad + 2 \lambda Z^2 (U_e U_i - \lambda Y_L^2) + \lambda^2 Z^4 + \lambda^2 Y_L^4, \\ a_1 &= 1 - X (d_1 + \lambda (2 d_3 + d_5)), \\ a_2 &= X (d_2 + \lambda (2 d_4 + d_6)), \\ a_3 &= X Y_T \lambda (d_3 + d_5), \\ a_4 &= X Y_T (d_1 + \lambda d_3), \\ a_5 &= X Y_T \lambda (d_4 + d_6), \\ a_6 &= X Y_T (d_2 + \lambda d_4), \\ a_7 &= X (U_i/\lambda - X - \lambda d_5 Y_T^2), \\ a_8 &= X (X + j Z - \lambda d_3 Y_T^2), \\ a_9 &= X (U_e - X - d_1 Y_T^2), \\ a_{10} &= \lambda c^2/(X V_i^2), \\ a_{11} &= c^2/(X V_e^2). \end{aligned}$$

Dann wird

$$\mathbf{p} = -\frac{e \sqrt{Z_0}}{\omega m_e} \begin{pmatrix} p_i \\ p_e \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v} = -\frac{\omega m_e}{e \sqrt{Z_0}} \begin{pmatrix} v_{iz} \\ v_{ez} \end{pmatrix},$$

und die Matrix \mathbf{K} [Gl. (10)] nimmt die Gestalt an:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_1 & 0 & 0 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & 0 & 0 & \mathbf{A}_4 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_5 & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{O} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{A}_1 &= \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a_3 & a_4 \\ -a_5 & -a_6 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{A}_3 &= \begin{pmatrix} a_3 & a_5 \\ a_4 & a_6 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} a_7 & a_8 \\ a_8 & a_9 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} a_{10} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bei longitudinale Magnetfeld ($Y_T = 0$) ist

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_3 = 0.$$

Die elektromagnetischen und die longitudinalen Plasmawellen sind dann entkoppelt.

Die Gleichung zur Bestimmung der Eigenwerte [Gl. (18)] läßt sich mit Hilfe einfacher Determinan-

tenregeln auf eine Determinante mit 4 Zeilen und 4 Spalten reduzieren:

$$\begin{vmatrix} a_1 - q_i^2 & -a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1 - q_i^2 & -a_5 & -a_6 \\ a_3 & a_5 & a_7 - q_i^2/a_{10} & a_8 \\ a_4 & a_6 & a_8 & a_9 - q_i^2/a_{11} \end{vmatrix} = 0.$$

Das ist eine Gleichung 4-ten Grades für q_i^2 , deren Lösung für das verlustfreie Plasma ($Z_e = Z_i = Z = 0$) eingehend von DENISSE und DELCROIX⁹ behandelt worden ist. Die Eigenwerte eines Wellenpaares unterscheiden sich in unserem Spezialfall lediglich im Vorzeichen ($q_{4+i} = -q_i$).

Die Elemente der Transformationsmatrix \mathbf{P} findet man mit Hilfe der Gl. (20) zu

$$\begin{aligned} p_{3i} &= q_i p_{1i}, & p_{5i} &= (q_i/a_{10}) p_{7i}, \\ p_{4i} &= q_i p_{2i}, & p_{6i} &= (q_i/a_{11}) p_{8i}, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} p_{2i} \\ p_{7i} \\ p_{8i} \end{pmatrix} = -\mathbf{G}^{-1} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_5 \\ a_4 \end{pmatrix} p_{1i},$$

wobei \mathbf{G}^{-1} die reziproke Matrix von

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} (a_1 - q_i^2) & -a_5 & -a_6 \\ a_5 & (a_7 - q_i^2/a_{10}) & a_8 \\ a_6 & a_8 & (a_9 - q_i^2/a_{11}) \end{pmatrix} \quad \text{ist.}$$

Ersichtlich ist

$$p_{ji} = p_{j \ i+4} \quad \text{für } j = 1, 2, 7, 8$$

$$\text{und} \quad p_{ji} = -p_{j \ i+4} \quad \text{für } j = 3, 4, 5, 6.$$

Die p_{ji} geben die Verhältnisse der Komponenten der i -ten Welle untereinander an. So ist z. B.

$$\frac{p_{2i}}{p_{1i}} = \left(\frac{E_y}{E_x} \right)_i \quad \text{die Wellenpolarisation}$$

$$\frac{p_{5i}}{p_{6i}} = \left(\frac{v_{iz}}{v_{ez}} \right)_i \quad \text{das Verhältnis der Partialgeschwindigkeiten}$$

und

$$\frac{p_{7i}}{p_{8i}} = \left(\frac{p_i}{p_e} \right)_i \quad \text{das Verhältnis der Partialdrucke der } i\text{-ten charakteristischen Welle.}$$

Die reziproke Matrix von \mathbf{P} hat die Gestalt

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4 \end{pmatrix}$$

mit

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{2B} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & \pm B_{11}/q_1 & \pm B_{21}/q_1 \\ B_{12} & B_{22} & \pm B_{12}/q_2 & \pm B_{22}/q_2 \\ B_{13} & B_{23} & \pm B_{13}/q_3 & \pm B_{23}/q_3 \\ B_{14} & B_{24} & \pm B_{14}/q_4 & \pm B_{24}/q_4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_2 = \frac{1}{2B} \begin{pmatrix} \pm B_{31} a_{10}/q_1 & \pm B_{41} a_{11}/q_1 & B_{31} & B_{41} \\ \pm B_{32} a_{10}/q_2 & \pm B_{42} a_{11}/q_2 & B_{32} & B_{42} \\ \pm B_{33} a_{10}/q_3 & \pm B_{43} a_{11}/q_3 & B_{33} & B_{43} \\ \pm B_{34} a_{10}/q_4 & \pm B_{44} a_{11}/q_4 & B_{34} & B_{44} \end{pmatrix}$$

und

$$B = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{71} & p_{72} & p_{73} & p_{74} \\ p_{81} & p_{82} & p_{83} & p_{84} \end{vmatrix}.$$

Die B_{ij} sind die Unterdeterminanten der Determinante B .

Die z -Komponente des zeitlich gemittelten Energievektors der i -ten aufsteigenden Welle wird

$$\overline{N_{zi}} = \frac{|A_i|^2}{2} \alpha_i \left\{ |p_{1i}|^2 + |p_{2i}|^2 + \frac{|p_{7i}|^2}{a_{10}} + \frac{|p_{8i}|^2}{a_{11}} \right\}, \quad (31)$$

wobei α_i der Realteil des Eigenwertes q_i ist [siehe Gl. (5)]. Wir sehen, daß die Welle keine Energie mehr transportiert, sobald der Realteil des Eigenwertes verschwindet. Da die Größen p_{2i} , p_{7i} und p_{8i} lineare Funktionen von p_{1i} sind, läßt sich unter der Voraussetzung, daß $\alpha_i \neq 0$ ist, der noch unbestimmte Faktor p_{1i} zu

$$p_{1i} = \frac{1}{\sqrt{|\alpha_i| \{1 + |p'_{2i}|^2 + |p'_{7i}|^2/a_{10} + |p'_{8i}|^2/a_{11}\}}}$$

mit

$$p'_{ji} = p_{ji}/p_{1i}$$

wählen, so daß auf Grund dieser Normierung die A_i ein direktes Maß für den Energietransport der Wellen darstellen [siehe Gl. (29) und (30)].

Die Gl. (31) gilt auch für die rücklaufenden Wellen B_i , indem A_i durch B_i ersetzt wird. Hier bleibt der Klammerausdruck unverändert. Lediglich das Vorzeichen von α_i wechselt und weist auf die entgegengesetzte Richtung des Energietransportes der rücklaufenden Wellen hin.

Über numerische Rechnungen der Energiebilanz von Plasmawellen in der Sonnenkorona soll an anderer Stelle berichtet werden.

Precursor-Effekte im T-Rohr

H. KLINGENBERG

Ernst-Mach-Institut, Freiburg i. Br. *

(Z. Naturforschg. 20 a, 1149—1156 [1965]; eingegangen am 6. Februar 1965)

Precursor-Effects in T-tubes were investigated by means of 3 cm-microwaves and photomultipliers **. The gas-filling of the tubes was predominantly air. In general, it is possible to differentiate between six precursor-phenomena which can be subdivided into groups of two. Each group consists of an "optical" precursor observed as a luminosity of the gas and of an "ionizing" precursor observed by the appearance of free electrons in the gas. The classification of these phenomena is as follows:

1st precursor:	(optical) detected by photomultipliers	} coinciding with the breakdown phase of the discharge
2nd precursor:	(ionizing) detected by microwaves	

Both precursors are probably caused by the uv- and vacuum-uv-radiation of electron avalanches or streamers during the breakdown phase. The experiments indicate that part of this radiation propagates by diffusion (velocity of diffusion about 10^8 cm/s).

3rd precursor:	(ionizing) detected by microwaves	} coinciding with the oscillations of the discharge current
4th precursor:	(optical) according to literature	

These precursors are caused by uv- and vacuum-uv-radiation of the discharge plasma the formation of which follows the ringing of the discharge current. Their behaviour differs from that of the 1st and 2nd precursor.

5th precursor:	(ionizing) detected by microwaves
6th precursor:	(optical) according to literature.

These last two precursors are caused by the radiation of the plasma propagating in the tube. In order to clarify the discussion it is appropriate to distinguish these precursors from the third and fourth one.

Observed electron densities are between 0.5×10^{12} and several 10^{12} electrons per cm^3 , effective collision frequencies are accordingly between 35 and 10 Gc/s.

Ein Ergebnis früherer Untersuchungen mit 3 cm-Mikrowellen am T-Rohr war der Nachweis, daß das Gas im Stoßrohr im Moment der Entladung vor-

* Neue Adresse: Institut für Plasmaphysik, Garching bei München.

** The results of the measurements by means of photomultipliers were published in this journal, cf. ¹.